Математика

Число S таково, что для любого представления S в виде суммы
положительных чисел, каждое из которых не превосходит 1, эти числа можно
разделить на две группы так, что каждое число попадает только в одну
группу и сумма чисел в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть не меньше чем 38?

б) Может ли число S быть равным 37,5?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Ответ:

а) нет

б) нет

в) 37,05

Решение:

а)

По условию, число S является суммой двух чисел не превосходящих 19. Отсюда следует, что само число S меньше или равно 19·2, т. е. 38.

«Не меньше чем 38» в условии означает больше или равно.

Объединяем условия: $38 \leqslant S \leqslant 38$

Получается вопрос сводится к формулировке:

Может ли S равняться 38?

Разложим число 38 на 39 слагаемых равных $\frac{38}{39}$. При разбиении 39 слагаемых на две группы, в одной из групп их окажется не меньше 20. Если посчитать сумму в такой группе, то результат будет больше 19, а значит S не может быть равно 38.

$$20 \cdot \frac{38}{39} = \frac{760}{39} \approx 19{,}48717948717949 > 19$$

б)

Рассуждение полностью аналогично предыдущему пункту. Разложим 37,5 на 39 слагаемых вида $\frac{37{,}5}{39}$.

$20 \cdot \frac{37{,}5}{39} = \frac{250}{13} \approx 19{,}23076923076923 > 19$ результат больше 19, а значит S не может быть равно 37,5.

в)

Обозначим число **S** как сумму двух групп: $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$.

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \text{ где } x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \quad (1)$$

$$G_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, G_2 = x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n \quad (2)$$

Рассмотрим первую группу. Сумма в первой группе по условию не должна превышать 19.
$\mathbf{G_1} \leqslant 19$

Для поиска максимального числа, необходимо по максимуму заполнить группу так, чтобы

$$G_1 + x_{k+1} > 19 \quad (3)$$

Так как слагаемое **x_{k+1}** по условию не превышает 1, то

$$G_1 > 18$$

учитывая, что вообще все слагаемые так же не превышают 1, можно сделать вывод, что количество слагаемых в группе больше 18 (**k>18**). Т.к. количество слагаемых не может быть дробным, получаем.

$$k \geqslant 19$$

Преобразуем формулу (3) к виду:

$$x_{k+1} > 19 - G_1$$

Учитывая (1) тот факт, что слагаемые у нас упорядочены по убыванию, верно и:

$$\left.\begin{array}{c} x_k > 19 - G_1, x_{k-1} > 19 - G_1, \ldots, x_2 > 19 - G_1, x_1 > 19 - G_1 \\ G_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \end{array}\right\} \Rightarrow G_1 > (19 - G_1) \cdot k \underset{k \geq 19}{\geqslant} (19 - G_1) \cdot 19$$

$$G_1 > \frac{361}{20}$$

Получается, что сумма в группе **G_1** не может быть меньше. Теперь можно вычислить, S, учитывая, что сумма второй группы должна не превышать 19.

$$S - G_1 \leqslant 19 \Rightarrow S \leqslant 19 + G_1 \Rightarrow S \leqslant 19 + \frac{361}{20} \Rightarrow S \leqslant 37{,}05$$

Теперь допустим, что всё-таки **S>37,05**. Рассуждая, как в пунктах а) и б) разобьём на две группы 39 слагаемых равных $\frac{37{,}05}{39}$. В одной из групп будет не меньше 20 слагаемых и сумма этой группы будет:

$$20 \cdot \frac{S}{39} > 20 \cdot \frac{37{,}05}{39} = 19$$

т. к., сумма группы не может превышать 19, то S не может быть больше 37,05.